

2019年天津河北区高三一模理科数学试卷

一、选择题：共8小题，每小题5分，共40分

1. 已知集合 $M = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x | x \geq 2\}$, 则集合 $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = (\quad)$.
- A. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x \leq 3\}$
2. i 为虚数单位, 则复数 $\frac{4+3i}{2+i} = (\quad)$.
- A. $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$ B. $\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$ C. $-\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$ D. $-\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$
3. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $(x+1)(x-2) > 0$ ” 是 “ $|x| \geq 1$ ” 的 $(\quad)$.
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 则 $(\quad)$.
- A. $f(0) < f(\log_3 2) < f(-\log_2 3)$ B. $f(\log_3 2) < f(0) < f(-\log_2 3)$
C. $f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0)$ D. $f(\log_3 2) < f(-\log_2 3) < f(0)$
5. 将函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则所得函数的最小周期为 $(\quad)$.
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π
6. 在平面直角坐标系中, 经过点 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$ 的双曲线的标准方程为 $(\quad)$.
- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{14} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{y^2}{14} - \frac{x^2}{7} = 1$
7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, D 为 BC 的中点, 以 AD 为折痕, 将 $\triangle ABC$ 折成直二面角 $B-AD-C$, 则过 A, B, C, D 四点的球的表面积为 $(\quad)$.
- A. 3π B. 4π C. 5π D. 6π

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x, & x \geq 0 \\ -ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$, 当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, 恒有 $f(x+a) < f(x)$, 则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

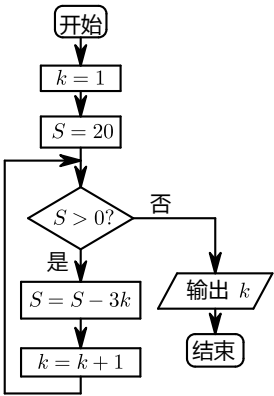
B. $\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

D. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

二、填空题：共6小题，每小题5分，共30分

9. 执行如图所示的程序框图，则输出 k 的值 _____ .



10. 二项式 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中, 常数项为 _____ . (用数字作答)

11. 设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 4y$ 的最大值为 _____ .

12. 若 $\lg a + \lg b = 0$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 _____ .

13. 用数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 组成没有重复数字的五位数, 其中比 40000 大的偶数共有多少个?

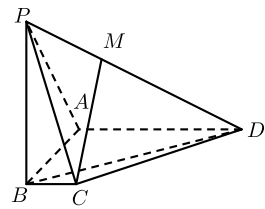
14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2, AD = 1, \angle BAD = 60^\circ$, 点 E 在 CD 上, 满足 $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DE}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} =$ _____ .

三、计算题：共6小题，共80分

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，满足 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$ ， $\sin B = \sqrt{6} \sin C$ ．
- (1) 求 $\cos A$ 的值．
- (2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值．

16. 某小组共7人，利用假期参加义工活动，已知参加义工活动的次数为1，2，3的人数分别为2，2，3．现从这7人中随机选出2人作为该组代表参加座谈会．
- (1) 设 A 为事件“选出的2人参加义工活动的次数之和为4”，求事件 A 发生的概率．
- (2) 设 X 为选出的2人参加义工活动次数之差的绝对值，求随机变量 X 的分布列及数学期望．

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ，且 $PB = AB = AD = 3$ ， $BC = 1$ ， M 为棱 PD 上的点。



- (1) 若 $PM = \frac{1}{3}PD$ ，求证： $MC \parallel$ 平面 PAB 。
- (2) 求直线 BD 与平面 PAD 所成角的大小。
- (3) 求二面角 $C-PD-A$ 的余弦值。

18. 已知公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ ，首项 $a_1 = 3$ ，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，且 $S_3 + a_3$ ， $S_5 + a_5$ ， $S_4 + a_4$ 成等差数列．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $b_n = \frac{na_n}{6}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ．

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点 , 且在直线 $l_2: x - y + 2\sqrt{6} = 0$ 上存在点 M , 使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形 , 求直线 l_1 的方程 .

20. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时 , 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极值 .
- (3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 , 求 a 的取值范围 .